Resonanz Ohr

a) Der Hörkanal beim Menschen hat eine Länge von 2,8 cm. Wie hoch ist die Grundfrequenz dieses halboffenen Resonators, wenn die Schallgeschwindigkeit temperaturbedingt 324 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?

Sei $l = 2{,}8\,\text{cm} = 2{,}8 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$ die Länge des Hörkanals und $v = 324\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Schallgeschwindigkeit.

Dann ist die Grundfrequenz des halboffenen Resonators

$$f = \frac{v}{4l} = \frac{324\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}8 \cdot 10^{-2}\,\text{m}} = 2893\,\text{Hz}$$

b) Wie groß muss die Federkonstante sein, damit das etwa 18,3 mg schwere Trommelfell dieselbe Resonanzfrequenz hat?

Sei $m = 18{,}3\,\text{mg} = 18{,}3 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}$ die Masse des Trommelfells. Nach dem Hookschen Gesetz gilt

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_H}}$$

Das stellen wir nach k_H um:

$$k_H = (2\pi \cdot f)^2 \cdot m = \left(\pi \cdot \frac{v}{2l}\right)^2 \cdot m$$

Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir auf

$$k_H = 6046\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Lautsprecher

Das Ordnungsamt überprüft den Aufbau einer Konzertanlage. Dabei wird in einem Abstand von 1 m ein Schalldruckpegel von 130 dB gemessen. In welchem Abstand sind die Lautsprecher noch so laut, dass die Schmerzgrenze von 120 dB erreicht wird?

Sei $r = 1\,\text{m}$ der Abstand und $\beta^p = 130\,\text{dB}$ der gemessene Schalldruckpegel. Den gesuchten Abstand finden wir durch

$$\beta_2 - \beta_1 = -20 \cdot \lg \frac{r_2}{r_1}$$

Das stellen wir nach r_2 um:

$$\begin{aligned}
\beta_2 - \beta_1 &= -20 \cdot \lg \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{\beta_2 - \beta_1}{-20} &= \lg \frac{r_2}{r_1} \\
10^{\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{-20}\right)} &= \frac{r_2}{r_1} \\
r_2 &= r_1 \cdot 10^{\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{-20}\right)}
\end{aligned}$$

Damit kommen wir bei uns auf $r_2 = 3{,}16\,\text{m}$.

In welcher maximalen Entfernung sind die Lautsprecher hörbar? (Bei Vernachlässigung von Absorptionseffekten, Hörschwelle 0 dB)

Wir nehmen den gleichen Ansatz wie eben (nur mit $\beta_2 = 0\,\mathrm{dB}$) und erhalten $r_2 = 3\,162\,278{,}66\,\mathrm{m}$. Das sind 3,16 Megameter.

Sonografie

Sie führen eine Ultraschalluntersuchung durch. Das Ultraschallgel hat die gleiche Impedanz, wie Haut und Fettgewebe (Dichte = $1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $v = 1510\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Absorptionskoeffizient: $0\,\frac{1}{\mathrm{cm}}$). Auf ihrem Bildschirm erscheint sehr deutlich ein Knochen (Dichte = $1700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $v = 3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) in einer Tiefe von 1,6 cm. Wie groß ist die detektierte Schallintensität im Vergleich zur Intensität des Senders?

Holen wir erstmal die Variablen zusammen. Die Dichte vom Ultraschallgel bzw. Haut und Fett sei $\rho_H = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, die Schallgeschwindigkeit darin sei $v_H = 1510\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Dichte vom Knochen sei $\rho_K = 1700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und die Schallgeschwindigkeit darin sei $v_K = 3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Tiefe sei $x = 1{,}6\,\mathrm{cm} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$.

Der Reflexionsgrad berechnet sich aus

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

wobei sich die Impedanzen Z_1 und Z_2 aus $Z = \rho \cdot v$ berechnen.

Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir hier auf:

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 = \left(\frac{1700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1510\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1510\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right)^2 = 0{,}3755$$

Damit werden 37,55% vom Ultraschall am Knochen reflektiert.

Bei einem anderen Patienten haben Sie vergessen das Ultraschallgel aufzutragen. Wieviel Intensität erhalten Sie nun vom Knochen am Sensor? (Luft: Dichte = $1{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $v = 343\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)

Hier kommt jetzt der Transmissionsgrad T zwischen Luft und Haut hinzu. Dieser ergibt sich aus $R + T = 1 \Rightarrow T = 1 - R$.

Anscheinend ist es aber nur

$$\frac{I_S}{I_1} = T^2 \cdot R = \left(1 - \left(\frac{\rho_L \cdot v_L - \rho_H \cdot v_H}{\rho_L \cdot v_L + \rho_H \cdot v_H}\right)^2\right)^2 \cdot \left(\frac{\rho_K \cdot v_K - \rho_H \cdot v_H}{\rho_K \cdot v_K + \rho_H \cdot v_H}\right)^2$$

Mit unseren Werten also $4{,}46 \cdot 10^{-7}$.

Ultraschall

Ultraschall mit einer Frequenz von 2,2 MHz wird in eine Arterie gesendet. Dort wird der Schall an den Blutkörperchen reflektiert, welche sich mit $25\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ auf die Schallquelle zu bewegen. Die Schallgeschwindigkeit im Gewebe beträgt $1540\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(Hinweis: auf volle Hertz runden, keine Fehlertoleranz)

a) Welche Frequenz empfängt das Blut?

$$f_B = \frac{f_S}{1 - \frac{v}{c}}$$

Ergibt $f_B = 2\,200\,357\,\text{Hz}$.

b) Welche Frequenz erreicht den Empfänger?

$$f_E = \frac{f_S}{1 + \frac{v}{c}}$$

Ergibt $f_E = 2\,199\,643\,\text{Hz}$.

c) Welche Schwebungsfrequenz ergibt sich aus der Mischung der beiden Wellen?

$$f_{\text{Schwebung}} = |f_B - f_E|$$

Ergibt $f_{\text{Schwebung}} = 714\,\text{Hz}$.