Astronaut

a) Ein Astronaut befindet sich auf der Internationalen Raumstation in etwa 400 km Höhe über Meeresniveau. Welche Beschleunigung wirkt dort aufgrund der Erdgravitation auf den Astronauten?

Einerseits gilt $F = m \cdot a$ (Definition der Kraft) und andererseits gilt $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ (Newtonsches Gravitationsgesetz). Diese setzen wir gleich und rechnen damit die gesuchte Beschleunigung a aus:

$$m_{\text{Astronaut}} \cdot a = G \cdot \frac{m_{\text{Astronaut}} \cdot m_{\text{Erde}}}{r^2}$$

Dabei ist $G = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ die Gravitationskonstante, $m_{\text{Erde}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg und $r = r_{\text{Erde}} + 400$ km, wobei $r_{\text{Erde}} =$ 6371 km ist.

Schön ist dabei, dass wir die Masse vom Astronauten vernachlässigen können, da sie sich auf beiden Seiten rauskürzt. Eingesetzt und ausgerechnet kommt man auf

$$a = 8{,}5972 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Trotz der Erdanziehung befindet sich der Astronaut dauerhaft im freien Fall. Welche Geschwindigkeit ist notwendig, um in einer festen Umlaufbahn in dieser Höhe zu verweilen?

Jetzt müssen wir die Zentripetalkraft $F_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$ nehmen und diese mit der Gewichtskraft $F = m \cdot a$ gleichsetzen. Für a nehmen wir die eben berechnete Beschleunigung $a = 8{,}5972 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$m_{\text{Astronaut}} \cdot a = m_{\text{Astronaut}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Wieder fliegt die Masse des Astronauten raus. Wir stellen die Gleichung nach v um und rechnen aus:

$$v = \sqrt{a \cdot r} = 7629{,}654 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7{,}63 \cdot 10^3 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Wie lange dauert eine Umrundung der Erde?

Mit dem Radius $r = r_{\text{Erde}} + 400$ km können wir die Länge der Umlaufbahn berechnen:

$$u = 2\pi r$$

Jetzt noch $v = \frac{s}{t}$ nach t umstellen, wobei der Weg jetzt die Länge der Umlaufbahn ist, und ausrechnen:

$$t = \frac{u}{v} = 5575{,}8 \text{ s}$$

Wir haben das noch in Stunden umgerechnet (1,5 h), aber das wurde komischerweise als falsch gewertet.

Ultrazentrifuge 3

Die Drehzahl einer Ultrazentrifuge steigt von 2000 U/min auf 7000 U/min. Um welchen Faktor vergrößert sich dabei der Drehimpuls?

Der Drehimpuls ist Trägheitsmoment · Winkelgeschwindigkeit, also

$$\vec{L_R} = I_R \cdot \vec{\omega}_R$$

Das Trägheitsmoment ändert sich nicht, weil es immer noch dieselbe Zentrifuge ist, mit der hier gearbeitet wird. Es ändert sich nur die Geschwindigkeit. Man kann die Geschwindigkeiten jetzt von U/min auf rad/s umrechnen, aber das ändert nichts am Faktor.

Betrachten wir die Drehimpulse $\vec{L}_{R,\text{langsam}}$ und $\vec{L}_{R,\text{schnell}}$, dann kommen wir von $\vec{L}_{R,\text{langsam}}$ zu $\vec{L}_{R,\text{schnell}}$, in dem wir $\vec{L}_{R,\text{langsam}}$ mit einem Faktor multiplizieren, also

$$\vec{L}_{R,\text{schnell}} = x \cdot \vec{L}_{R,\text{langsam}}$$

Dies stellen wir nach x um und rechnen statt den Winkelgeschwindigkeiten mit den angegebenen Geschwindigkeiten:

$$x = \frac{\vec{L}_{R,\text{schnell}}}{\vec{L}_{R,\text{langsam}}} = \frac{I_R \cdot \vec{\omega}_{R,\text{schnell}}}{I_R \cdot \vec{\omega}_{R,\text{langsam}}} = \frac{7000\,\text{U/min}}{2000\,\text{U/min}} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Ultrazentrifuge 2

Eine Ultrazentrifuge rotiert mit einer Frequenz von 108000 Umdrehungen pro Minute. Ein rotes Blutkörperchen mit einer Masse von $2{,}8 \cdot 10^{-11}$ g befindet sich in 8 mm von der Rotationsachse entfernt.

a) Wie hoch ist die Beschleunigung, die auf das Partikel wirkt?

Die Zentripetalbeschleunigung ergibt sich aus der Zentripetalkraft:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{r}$$

Damit wir keine Probleme bei den Einheiten bekommen, rechnen wir die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ um. Die Länge der Umdrehung hängt dabei vom Radius ab ($u = 2\pi r$):

$$v = 108\,000\,\text{U/min} = 108000 \cdot \frac{2\pi r}{60\,\text{s}}$$

Nutzen wir die Macht der wissenschaftlichen Zahlenschreibweise:

$$v = 108 \cdot 10^3 \cdot \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{60\,\text{s}} = 108 \cdot \frac{2\pi \cdot 8\,\text{m}}{60\,\text{s}} = \frac{144\pi}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Und damit rechnen wir die Beschleunigung aus:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{144\pi}{5}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1\,023\,280{,}584\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1{,}023 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Welche Zentripetalkraft ist notwendig, um das Erythrozyt auf der Kreisbahn zu halten?

Mit der Beschleunigung können wir die Kraft ausrechnen:

$$F = m \cdot a = 2{,}8 \cdot 10^{-11}\,\text{g} \cdot 1{,}023 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-14}\,\text{kg} \cdot 1{,}023 \cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2{,}8644 \cdot 10^{-8}\,\text{N}$$

Beinverkürzung

Ein 80 kg schwerer Mann steht auf einem Bein, wobei ca. 90 % seines Gewichts auf dem Oberschenkelknochen lasten. Dieser sei vereinfacht als 40 cm lange Stange mit einem Radius von 2 cm zu betrachten. Um wieviel verkürzt sich der Knochen im Falle eines Elastizitätsmoduls von etwa 20 $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}$.

Wir nehmen das Hookesche Gesetz zur Hand und stellen es nach der gesuchten Größe ΔL um:

$$\frac{F}{A_0} = Y_H \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{F \cdot L}{A_0 \cdot Y_H}$$

Für das Ergebnis müssen wir nur noch die Schikanen der Aufgabe umgehen:

$$\begin{aligned} F &= 0{,}9 \cdot m \cdot g = 0{,}9 \cdot 80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 706{,}32\,\mathrm{N} \\ A_0 &= \pi r^2 = \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ Y_H &= \frac{20 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{(10^{-3}\mathrm{m})^2} = 20 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \\ L &= 0{,}4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Einsetzen und ausrechnen ergibt:

$$\Delta L = 1{,}124 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

Also verdammt wenig.