Ideales Gas

Nutzen Sie das ideales Gasgesetz, um zu berechnen, welche Masse von Luft ein 6 m × 5 m × 2 m großer Raum bei einer Temperatur von 23 °C und einem Druck von 103 000 Pa enthält!

Hinweis: molare Masse Luft $M_{\text{Luft}} = 28{,}97\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Wir haben das Volumen $V = 6\,\text{m} \times 5\,\text{m} \times 2\,\text{m} = 60\,\text{m}^3$, die Temperatur $T = 23\,°\text{C} = 296\,\text{K}$, den Druck $p = 103\,000\,\text{Pa}$ und die molare Masse von Luft $M_{\text{Luft}} = 28{,}97\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} = 28{,}97 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

An Gleichungen haben wir das Gesetz idealer Gase:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

und die Definition der molaren Masse:

$$M = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad m = n \cdot M$$

Wir stellen das Gesetz idealer Gase nach n um:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}$$

und setzen es in die Definition der molaren Masse ein:

$$m = n \cdot M = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \cdot M$$

Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir auf

$$m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \cdot M = \frac{103\,000\,\text{Pa} \cdot 60\,\text{m}^3}{8{,}314\,459\,8\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\,\text{K}} \cdot 296\,\text{K}} \cdot 28{,}97 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 72{,}77\,\text{kg}$$

Kühleis

Sie haben sich gestoßen und es bildet sich ein Hämatom. Um die Schwellung zu minimieren, wollen Sie die betroffene Stelle kühlen. Wie viel Eis (am Schmelzpunkt) benötigen sie mindestens, um etwa 1 l Gewebe von 30 °C auf 22 °C abzukühlen? (Das Gewebe hat in etwa die gleichen Eigenschaften wie Wasser)

Sei $V_G = 1\,\text{l}$, $T_1 = 30\,°\text{C}$ und $T_m = 22\,°\text{C}$. Die Temperatur unserer „Kühlflüssigkeit" sei $T_K = 0\,°\text{C}$. Da Wasser die Dichte $\rho = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}$ hat, können wir $m_G = 1\,\text{kg}$ festlegen. Die spezifische Wärmekapazität von Wasser und damit auch unserem Gewebe ist $c_W = 4{,}18\,\frac{\text{J}}{\text{g}\,\text{K}}$.

Normalerweise könnte man die Richmannsche Mischungsregel benutzen, aber da das Eis beim Kühlen schmilzt, funktioniert das nicht so einfach. Für das Schmelzen wird zusätzliche Energie benötigt und damit brauchen wir auch mehr Masse.

Die Kühlung des Gewebes benötigt Energie. Diese ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= m_G \cdot c_G \cdot \Delta T_{\text{Gewebe}} \\ &= 1000\,\text{g} \cdot 4{,}18\,\frac{\text{J}}{\text{g}\,\text{K}} \cdot 8\,\text{K} = 33\,440\,\text{J}\end{aligned}$$

Diese Energie müssen wir aus dem Eis liefern. Dafür können wir aber nicht dieselbe Gleichung nehmen, sondern müssen die benötigte Schmelzwärme einbeziehen. Das führt uns zu:

$$\Delta Q = m_E \cdot c_W \cdot \Delta T + m_E \cdot c_S = m_E \cdot (c_W \cdot \Delta T + c_S)$$

Dabei ist c_S die Schmelzwärme von Eis und diese liegt bei $c_S = 334\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}$. c_W ist die spezifische Wärmekapazität von Wasser.

Aus dieser Gleichung können wir die benötigte Masse des Eises berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= m_E \cdot (c_W \cdot \Delta T_{\text{Eis}} + c_S) \\ m_E &= \frac{\Delta Q}{(c_W \cdot \Delta T_{\text{Eis}} + c_S)} && \Delta Q \text{ vom Gewebe einsetzen} \\ &= \frac{m_G \cdot c_G \cdot \Delta T_{\text{Gewebe}}}{(c_W \cdot \Delta T_{\text{Eis}} + c_S)} \end{aligned}$$

Einsetzen und ausrechnen liefert:

$$m_E = \frac{m_G \cdot c_G \cdot \Delta T_{\text{Gewebe}}}{(c_W \cdot \Delta T_{\text{Eis}} + c_S)} = \frac{1000\,\mathrm{g} \cdot 4{,}18\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}} \cdot 8\,\mathrm{K}}{(4{,}18\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}} \cdot 22\,\mathrm{K} + 334\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}})} = 78{,}5\,\mathrm{g} = 0{,}0785\,\mathrm{kg}$$

Zellkondensator

Eine biologische Zelle hat ein Volumen von $1\,\mathrm{cm}^3$ und eine Oberfläche von $9{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm}^2$. Die Potenzialdifferenz zwischen Innen- und Außenseite der Zellmembran beträgt 64 mV. Die Kapazität des Zellkondensators pro Einheitsfläche beträgt $1{,}1\,\frac{\mu\mathrm{F}}{\mathrm{cm}^2}$.

(a) Wie hoch ist die Kapazität dieses biologischen Kondensators?

Die Fläche der Zelle ist $A = 9{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm}^2$ und die Kapazität pro Flächeneinheit (spezifische Membrankapazität) ist $w = 1{,}1\,\frac{\mu\mathrm{F}}{\mathrm{cm}^2}$.

Damit ergibt sich die Kapazität der Zelle aus:

$$C = A \cdot w = 9{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{cm}^2 \cdot 1{,}1\,\frac{\mu\mathrm{F}}{\mathrm{cm}^2} = 9{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mu\mathrm{F} = 0{,}99\,\mathrm{pF}$$

(b) Wieviele Überschuss-Kaliumionen befinden außerhalb der Membran?

Aus der Definition der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad \Leftrightarrow \quad Q = C \cdot U$$

können wir den Ladungsunterschied bestimmen. Wenn wir diesen durch die Elementarladung $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ teilen, kommen wir auf die Anzahl n der Überschuss-Kaliumionen (diese sind schließlich einfach positiv geladen):

$$\begin{aligned} n &= \frac{Q}{e} = \frac{C \cdot U}{e} \\ &= \frac{0{,}99\,\mathrm{pF} \cdot 64\,\mathrm{mV}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \frac{0{,}99 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot 64 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 395505 \end{aligned}$$

(c) Wie hoch ist die gespeicherte elektrische Energie?

Die elektrische Energie eines Kondensators berechnet sich aus:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0{,}99 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot \left(64 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}\right)^2 = 2{,}027\,52 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J} = 2{,}027\,52 \cdot 10^{-15} \cdot 6{,}2415 \cdot 10^{18}\,\mathrm{eV} \\
&= 12\,654{,}77\,\mathrm{eV}
\end{aligned}
$$