Alveole

In einer isolierten Alveole herrscht gegenüber dem Außendruck ein erhöhter Druck von 5 mmHg. Dadurch stellt sich ein Durchmesser der Alveole von 0,3 mm ein. Wie groß ist die Oberflächenspannung des mit surfactants angereicherten Flüssigkeitsfilms, der die Alveole umgibt?

Sei $p = 5\,\text{mmHg} = 5 \cdot 133{,}322\,\text{Pa} = 666{,}61\,\text{Pa}$ und $d = 0{,}3\,\text{mm}$. Damit haben wir einen Radius von $r = 0{,}15 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$.

Die Oberflächenspannung ist definiert durch

$$\gamma = \frac{W}{A}$$

Da $W = F \cdot s$ und der zurückgelegte Weg s gleich unserem Radius r ist, kommen wir auf

$$\gamma = \frac{F \cdot r}{A}$$

Jetzt wissen wir auch, dass $p = \frac{F}{A}$ gilt und daraus folgt $F = p \cdot A$. Das führt uns zu

$$\gamma = \frac{p \cdot A \cdot r}{A} = p \cdot r$$

Erstaunlich einfach also. Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir auf

$$\gamma = 666{,}61\,\text{Pa} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0{,}099\,991\,5\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 0{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Gewichtsbestimmung

Ein Bauer sitzt auf dem federnden Sitz seines Traktors. Die federnde Masse beträgt 71 kg und die Periodendauer der Schwingung 1,3 s. Dann klettert der Enkel 23 kg mit auf den Sitz. Welche Periodendauer ergibt sich dann?

Sei $m_B = 71\,\text{kg}$ die Masse des Bauern, $m_E = 23\,\text{kg}$ die Masse des Enkels und $T_v = 1{,}3\,\text{s}$ die Periodendauer bevor sich der Enkel dazugesetzt hat.

Mit dem Zusammenhang

$$f_{\text{osc}} = \frac{1}{T_{\text{osc}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

können wir die Federkonstante bestimmen und danach genau so die gesuchte Periodendauer T_n (n für „nachher“) berechnen.

Wir können das aber auch in einem Rutsch erledigen und brauchen die Federkonstante gar nicht explizit berechnen. Keine Angst, das sieht wieder kompliziert ist aus, ist aber nur der übliche Umstellen-Einsetzen-Vereinfachen-Zyklus.

Stellen wir die Gleichung zunächst nach der Federkonstante k_H um:

$$\frac{1}{T_v} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m_B}} \qquad | \cdot 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{T_v} = \sqrt{\frac{k_H}{m_B}} \qquad | \text{ (beide Seiten quadrieren)}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2 = \frac{k_H}{m_B} \qquad | \cdot m_B$$

$$m_B \cdot \left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2 = k_H$$

Wir könnten jetzt die Federkonstante ausrechnen, aber wer will schon rechnen? Stattdessen schauen wir uns an, wie wir auf die gesuchte Periodendauer T_n kommen:

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m_E + m_B}}$$

Die Masse setzt sich nun aus der des Enkels und der des Bauern zusammen. Für k_H nehmen wir den Term, nach dem wir oben umgestellt haben (Einsetzen-Phase):

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_B \cdot \left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2}{m_E + m_B}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_B}{m_E + m_B} \cdot \left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2} \qquad | \text{ (Wurzel- bzw. Potenzgesetze anwenden)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_B}{m_E + m_B}} \cdot \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_v}\right)^2} \qquad | \text{ (Wurzel und Quadrat heben sich auf)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_B}{m_E + m_B}} \cdot \frac{2\pi}{T_v} \qquad | \text{ (}2\pi\text{ kürzt sich raus)}$$

$$\frac{1}{T_n} = \sqrt{\frac{m_B}{m_E + m_B}} \cdot \frac{1}{T_v} = \frac{\sqrt{\frac{m_B}{m_E+m_B}}}{T_v} \qquad | \text{ (Reziproke auf beiden Seiten bilden)}$$

$$T_n = \frac{T_v}{\sqrt{\frac{m_B}{m_E+m_B}}}$$

Und schon können wir die neue Periodendauer aus den gegebenen Größen berechnen. In diesem Fall:

$$T_n = \frac{1{,}3\,\mathrm{s}}{\sqrt{\frac{71\,\mathrm{kg}}{23\,\mathrm{kg}+71\,\mathrm{kg}}}} = 1{,}4958\,\mathrm{s}$$

ISS

Auf der ISS kann man schlecht auf eine Waage steigen. Um die Masse eines Astronauten im All zu bestimmen, verwendet man deshalb einen federnd gelagerten Sitz (Masse 5 kg) auf dem der Raumfahrer festgeschnallt wird. Sitz und Astronaut führen dabei eine einfache harmonische Schwingung aus. Die Feder der Konstruktion hat eine Federkonstante von 520 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Wie groß ist die Masse des Raumfahrers, wenn die Periodendauer 2,6 s beträgt?

Wir nehmen dieselbe Gleichung wie bei der Aufgabe davor:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m}}$$

Unsere Masse m ergibt sich jetzt aus der Masse des Sitzes $m_S = 5\,\mathrm{kg}$ und der Masse des Astronauten m_A:

$$m = m_A + m_S$$

Eingesetzt erhalten wir:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m_A + m_S}}$$

Das stellen wir nach m_A um:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_H}{m_A + m_S}} \\
\frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{k_H}{m_A + m_S}} \\
\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \frac{k_H}{m_A + m_S} \\
\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{k_H} &= \frac{1}{m_A + m_S} \\
\frac{k_H}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} &= m_A + m_S \\
m_A &= \frac{k_H}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} - m_S = \frac{k_H \cdot T^2}{4\pi^2} - m_S
\end{aligned}$$

Einsetzen und ausrechnen ergibt:

$$m_A = \frac{520\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (2{,}6\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} - 5\,\mathrm{kg} = 84{,}04\,\mathrm{kg}$$

Laplace-Gesetz

Eine Kapillare hat einen Radius von $7{,}0 \cdot 10^{-6}$ m. Zwischen Innen- und Aussenseite des Gefäßes herrscht ein Druckunterschied von 33 mmHg. Wie groß ist die Wandspannung nach dem Laplace-Gesetz, welche die Gewebestruktur aufbringen muss?

Sei $r = 7{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$ und $\Delta p = 33\,\mathrm{mmHg} = 4399{,}626\,\mathrm{Pa}$. Wie bei der Alveole berechnen wir die Wandspannung T mittels

$$T = r \cdot \Delta p = 7{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot 4399{,}626\,\mathrm{Pa} = 0{,}030\,797\,382\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 0{,}03\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$