Aneurysma

a) Bei einem Patienten tritt eine Gefäßerweiterung an der Aorta auf, bei der sich der Gefäßdurchmesser um das 1,8-fache erhöht. Die normale Fließgeschwindigkeit ist $0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Auf welche Geschwindigkeit verringert sich das Blut innerhalb der Erweiterung?

Statt dem 1,8-fachen Durchmesser nehmen wir den x-fachen Durchmesser, um es allgemein zu lösen. Die Fließgeschwindigkeit v_1 sei $0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Querschnittsfläche der Aorta sei vor der Gefäßerweiterung $A_1 = \pi r_1^2 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \pi\frac{d_1^2}{4}$ mit dem Durchmesser d_1. Nach der Gefäßerweiterung erhöht sich der Durchmesser der Querschnittsfläche um das x-fache, also gilt $d_2 = x \cdot d_1$. Damit gilt für den Flächeninhalt des Querschnitts nach der Gefäßerweiterung

$$A_2 = \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} = \pi \cdot \frac{(x \cdot d_1)^2}{4} = \pi \cdot \frac{x^2 \cdot d_1^2}{4} = x^2 \cdot \pi\frac{d_1^2}{4} = x^2 \cdot A_1$$

Dies benutzen wir in der Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$$

Da sich die Dichte ρ_1 des Blutes nicht ändert (also $\rho_1 = \rho_2$), können wir sie auf beiden Seiten rauskürzen und es bleibt:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

v_1 ist gegeben und v_2 wollen wir herausfinden. Also umstellen und den oben ermittelten Zusammenhang der Querschnittsflächen hinzunehmen:

$$v_2 = \frac{A_1 \cdot v_1}{A_2} = \frac{A_1 \cdot v_1}{x^2 \cdot A_1} = \frac{v_1}{x^2}$$

Bei unseren Werten von $v_1 = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $x = 1{,}8$ kommen wir auf $v_2 = \frac{10}{81}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}1235\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

b) Durch die geänderten Strömungsverhältnisse ändern sich auch die Druckverhältnisse innerhalb des Aneurysmas. Um wieviel steigt der statische Druck? (Dichte Blut: $1{,}050\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)

Die Dichte von Blut ist $1{,}050\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ bzw. $1050\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ in SI-Einheiten.

Die Bernoulli-Gleichung[1] besagt

$$p + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v^2 + \rho_{\mathrm{fl}} g h = \text{const.}$$

Wir betrachten wieder zwei Zustände: vor der Gefäßerweiterung und nach der Gefäßerweiterung. In beiden Zuständen muss $p + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v^2 + \rho_{\mathrm{fl}} g h$ konstant sein. Es gilt demnach

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v_1^2 + \rho_{\mathrm{fl}} g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v_2^2 + \rho_{\mathrm{fl}} g h$$

Der Summand $\rho_{\mathrm{fl}} g h$ ist auf beiden Seiten gleich, weil sich weder die Dichte noch die Höhe und schon gar nicht die Erdbeschleunigung ändert. Das können wir eliminieren und erhalten:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{fl}} v_2^2$$

[1] Achtung: auf seinen Folien ist ein Fehler: bei v fehlt das Quadrat.

Gesucht ist der Druckunterschied, also $p_2 - p_1$ (nachher − vorher). Stellen wir die Gleichung danach um:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho_{\text{fl}} v_1^2 - \frac{1}{2}\rho_{\text{fl}} v_2^2 = \frac{1}{2}\rho_{\text{fl}}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir auf

$$p_2 - p_1 = 76\,\text{Pa}$$

Bypass

Ein Bypass ist eine Möglichkeit, um bei konstantem Druckabfall die Belastung verengter Blutgefäße zu verringern. Dabei fließt das Blutes teils durch das verengte Gefäß und teils durch den Bypass.

Die Volumenstromstärke soll um einen Faktor 3,8 erhöht werden!

a) Den wievielfachen Gefäßdurchmesser muss der Bypass haben, wenn man von einer festen Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Gefäßquerschnitt ausgeht?

Wir gestalten die Lösung dieses Problems als ein Drama in drei Akten.

Akt 1: Exposition Sei x der Faktor, um den sich die Volumenstromstärke erhöht (damit wir das Problem wieder allgemein lösen). Wieder betrachten wir zwei Zustände: vor und nach der erhöhten Volumenstromstärke (Q_1 und Q_2). Für Q_1 gilt $Q_1 = v_m \cdot A_G$, wobei A_G die Querschnittsfläche des Blutgefäßes ist. Für Q_2 gilt $Q_2 = v_m \cdot A$, wobei A die Summe der Querschnittsflächen von Blutgefäß und Bypass ist (also $A = A_G + A_B$). Das Blut verteilt sich nach dem Legen des Bypasses auf das Gefäß und den Bypass. Für die Querschnittsfläche (eines Kreises) gilt wie immer $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$. Die Aufgabenstellung sagt, dass sich die Volumenstromstärke um den Faktor x erhöht, also gilt $Q_2 = x \cdot Q_1$.

Gefragt ist: „den wievielfachen Gefäßdurchmesser muss der Bypass haben?“, also gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Durchmesser des Gefäßes d_G und dem Durchmesser des Bypasses d_B der Form $d_B = k \cdot d_G$ bzw. $k = \frac{d_B}{d_G}$ und genau dieses k suchen wir.

Akt 2: Entwicklung Aus $Q_1 = v_m \cdot A_G$ und $Q_2 = v_m \cdot A$ folgt

$$v_m = \frac{Q_1}{A_G} = \frac{Q_2}{A}$$

In diese Gleichung setzen wir die vorbereiteten Zusammenhänge aus Akt 1 ein:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{A_G} &= \frac{x \cdot Q_1}{A_G + A_B} && \mid : Q_1 \\ \frac{1}{A_G} &= \frac{x}{A_G + A_B} && \mid \cdot (A_G + A_B) \\ x &= \frac{A_G + A_B}{A_G} \end{aligned}$$

Hier dürfen wir natürlich nicht einfach kürzen[2]. Stattdessen verteilen wir den Nenner auf die einzelnen Summanden:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{A_G}{A_G} + \frac{A_B}{A_G} \\
&= 1 + \frac{A_B}{A_G} && \text{(Fläche eines Kreises war doch gleich?)} \\
&= 1 + \frac{\pi \cdot \frac{d_B^2}{4}}{\pi \cdot \frac{d_G^2}{4}} && \text{(alles Unwichtige rauskürzen)} \\
&= 1 + \frac{d_B^2}{d_G^2} = 1 + \left(\frac{d_B}{d_G}\right)^2
\end{aligned}
$$

Und genau diesen Quotienten $\frac{d_B}{d_G}$ suchen wir. Wir könnten dafür jetzt das k aus Akt 1 einsetzen, aber das würde vermutlich mehr verwirren als nützen. Bleibt nur noch: Gleichung umstellen!

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= \left(\frac{d_B}{d_G}\right)^2 \\
\frac{d_B}{d_G} &= \sqrt{x-1} && \left(\text{ganz genau wäre es } \frac{d_B}{d_G} = \pm\sqrt{x-1}\text{, aber nur aus mathematischer Sicht}\right)
\end{aligned}
$$

Akt 3: Lösung Wenn wir mal den vorgegebenen Faktor der Aufgabe ignorieren und annehmen, dass sich die Volumenstromstärke verdoppeln soll (also $x = 2$), dann müsste der Bypass den $\sqrt{2-1} = 1$-fachen Durchmesser des Gefäßes haben, damit die Strömungsgeschwindigkeit gleich bleibt. Also genauso groß, was Sinn ergibt.

Bei uns war der Faktor jedoch 3,8, also muss der Bypass den 1,673-fachen Durchmesser haben.

b) Den wievielfachen Gefäßdurchmesser muss der Bypass haben, wenn man nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille einen parabolischen Geschwindigkeitsverlauf annimmt?

Wir nehmen das Gesetz von Hagen-Poiseuille her:

$$Q = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot \Delta l}$$

und betrachten wieder zwei Zustände Q_1 und Q_2 (vorher und nachher), wobei wieder $Q_2 = x \cdot Q_1$ gilt. Weiterhin gilt, dass sich die Volumenstromstärke Q_2 aus den Volumenstromstärken von Gefäß und Bypass zusammensetzt, also $Q_2 = Q_B + Q_G$, wobei Q_G nichts anderes ist, als unsere anfängliche Volumenstromstärke Q_1. Es ist also $Q_G = Q_1$. Führen wir das mit dem Gesetz von Hagen-Poiseuille zusammen:

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= x \cdot Q_1 \\
Q_B + Q_G &= x \cdot Q_G \\
x &= \frac{Q_B + Q_G}{Q_G} = 1 + \frac{Q_B}{Q_G} \\
&= 1 + \frac{\frac{\pi \cdot r_B^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot \Delta l}}{\frac{\pi \cdot r_G^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot \Delta l}} = 1 + \frac{r_B^4}{r_G^4} = 1 + \left(\frac{r_B}{r_G}\right)^4 = 1 + \left(\frac{\frac{d_B}{2}}{\frac{d_G}{2}}\right)^4 = 1 + \left(\frac{d_B}{d_G}\right)^4
\end{aligned}
$$

[2] Aus Differenz und Summen, kürzen nur die …

Das stellen wir wieder nach $\frac{d_B}{d_G}$ um und erhalten:

$$\frac{d_B}{d_G} = \sqrt[4]{x-1}$$

Für unseren Faktor von 3,8 erhalten wir, dass der Bypass $\sqrt[4]{3{,}8-1} = 1{,}294$-mal so groß sein muss.

Wir hätten Teilaufgabe a) nach dem gleichen Prinzip angehen können ($Q_2 = x \cdot Q_1 \Rightarrow x = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_B+Q_G}{Q_G}$) und wären dort auch auf $\frac{d_B}{d_G} = \sqrt{x-1}$ gekommen.

c) Um welchen Faktor ändert sich der effektive Strömungswiderstand?

Hinweis: Bilden Sie beispielsweise den Quotienten der Volumenstromstärken.

Eben haben wir gezeigt, dass

$$\sqrt[4]{x} - 1 = \frac{r_B}{r_G}$$

Also gilt für r_B:

$$r_B = \left(\sqrt[4]{x} - 1\right) \cdot r_G$$

Für den Strömungswiderstand gilt:

$$R = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$$

Wir suchen wieder einen Faktor, um den sich der Strömungswiderstand erhöht, also gilt folgende Beziehung:

$$R_2 = k \cdot R_1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{R_2}{R_1}$$

R_2 ist der Strömungswiderstand mit Bypass und R_1 ist der Strömungswiderstand ohne Bypass. Sei r wieder die Summe der Radien von Gefäß und Bypass ($r = r_G + r_B$), dann erhalten wir:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{8\cdot\eta\cdot L}{\pi\cdot r^4}}{\frac{8\cdot\eta\cdot L}{\pi\cdot r_G^4}} = \frac{r_G^4}{r^4} = \frac{r_G^4}{(r_G + r_B)^4} = \frac{r_G^4}{\left(r_G + \left(\sqrt[4]{x}-1\right)\cdot r_G\right)^4} = \frac{r_G^4}{\left(\sqrt[4]{x}\cdot r_G\right)^4} = \frac{r_G^4}{x \cdot r_G^4} = \frac{1}{x}$$

Bei $x = 3{,}8$ erhalten wir demnach eine Steigerung des Strömungswiderstandes um das 0,263-fache.

Diffusion

Ein in Wasser gelöstes Molekül habe eine Diffusionskonstante von $8{,}1 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$. Wie lange dauert es im Mittel, bis dieses Molekül eine Strecke von 3 mm zurück gelegt hat?

Die mittlere Diffusion eines Moleküls in eine Raumrichtung beträgt

$$x_{\mathrm{avg}} = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$$

Stellen wir das nach t um, dann erhalten wir

$$t = \frac{x_{\mathrm{avg}}^2}{2D}$$

Jetzt noch die nervige Einheitenkonvertierung und wir erhalten

$$t = \frac{(3\,\mathrm{mm})^2}{2 \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = \frac{\left(3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2}{2 \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = \frac{9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 0{,}555\,555\,5 \cdot 10^4\,\mathrm{s} = 5555{,}555\,\mathrm{s} = 1{,}543\,\mathrm{h}$$

Infusion

Ein Patient bekommt eine Infusion durch eine Nadel von 3 cm Länge und 0,3 mm Durchmesser. Die Infusionslösung hat eine Dichte von 1,094 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und eine Viskosität von 0,000 88 Pa s. In welcher Höhe muss der Infusionsbeutel mindestens hängen, um gegen den Blutdruck von 110 mmHg eine Infusion mit 1 $\frac{\mathrm{mL}}{\mathrm{min}}$ zu gewährleisten?

Wenn man sich die Folien und Rechenbeispiele genau ansieht, dann erkennt man beim Gesetz von Hagen-Poiseuille folgenden Zusammenhang: wenn eine Flüssigkeit durch eine Röhre fließt, dann kommt es zu einem Druckabfall (Δp).

Schauen wir uns diesen Druckabfall an:

$$Q = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot \Delta l} \qquad \text{Gesetz von Hagen-Poiseuille} \rightarrow \text{nach } \Delta p \text{ umstellen}$$

$$\Delta p = \frac{Q \cdot 8 \cdot \eta \cdot \Delta l}{\pi \cdot r^4}$$

Kurz die Einheiten konvertieren:

$$Q = 1\,\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{min}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{L}}{60\,\mathrm{s}} = \frac{1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3}{60\,\mathrm{s}} = \frac{1}{60} \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta l = 3\,\mathrm{cm} = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$d = 0{,}3\,\mathrm{mm} = 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \Rightarrow r = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$\rho = 1{,}094\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1{,}094 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\eta = 0{,}000\,88\,\mathrm{Pa\,s} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa\,s}$$

Ergibt für unser Beispiel: $\Delta p = 2213{,}24\,\mathrm{Pa}$, d. h. allein für das Durchfließen der Nadel muss die Infusionslösung einen Druck von 2213,24 Pa aufbauen. Dazu kommt aber noch der Blutdruck von $p_{\mathrm{Blut}} = 110\,\mathrm{mmHg} = 110 \cdot 133{,}322\,\mathrm{Pa} = 14\,665{,}42\,\mathrm{Pa}$, den die Infusionslösung überwinden muss, um in den Kreislauf zu gelangen (andernfalls pumpt das Herz Blut in den Infusionsbeutel). Um diesen Druck aufzubauen, wird der Beutel in eine bestimmte (und bei uns gesuchte) Höhe gehängt, sodass sich ein Schweredruck ergibt. Dieser Schweredruck berechnet sich durch

$$p_{\mathrm{SD}} = \rho \cdot g \cdot h$$

und er muss mindestens so hoch sein, dass der Druckabfall in der Nadel und der Blutdruck überwunden wird. Also gilt

$$\Delta p + p_{\mathrm{Blut}} = p_{\mathrm{SD}}$$

$$\frac{Q \cdot 8 \cdot \eta \cdot \Delta l}{\pi \cdot r^4} + p_{\mathrm{Blut}} = \rho \cdot g \cdot h \qquad \text{(nach } h \text{ umstellen)}$$

$$h = \frac{\frac{Q \cdot 8 \cdot \eta \cdot \Delta l}{\pi \cdot r^4} + p_{\mathrm{Blut}}}{\rho \cdot g}$$

Eingesetzt und ausgerechnet kommen wir auf $h = 1{,}573\,\mathrm{m}$. Bei Ilias wird jedoch hauptsächlich 1,4 m akzeptiert.